پاسخ‌نامه تشریحی

۱

$D_f : x \geq ۲ \quad , \quad D_g = \{۰, ۳, ۵\}$

$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x = ۰, ۳, ۵ \mid g(x) \geq ۲\} = \{۰, ۳\}$

$fog(۰) = f(g(۰)) = f(۴) = \sqrt{۴ - ۲} = \sqrt{۲}$, $fog(۳) = f(g(۳)) = f(۲) = ۰$

$fog = \{(۰, \sqrt{۲}), (۳, ۰)\}$

$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \geq ۳ | f(x) = ۰, ۳, ۵\}$

$f(x) = ۰ \to \sqrt{x - ۲} = ۰ \to x = ۲ \to f(x) = ۳ \to \sqrt{x - ۲} = ۳ \to x = ۱۱$

$f(x) = ۵ \to \sqrt{x - ۲} = ۵ \to x = ۲۷ \to D_{gof} = \{۲, ۱۱, ۲۷\}$

$gof(۲) = g(f(۲)) = g(۰) = ۴$, $gof(۱۱) = g(f(۱۱)) = g(۳) = ۲$

$gof(۲۷) = g(f(۲۷)) = g(۵) = -۹ \to gof = \{(۲, ۴), (۱۱, ۲), (۲۷, -۹)\}$

۲

$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow \frac{۲x_۱ + ۱}{x_۱ - ۳} = \frac{۲x_۲ + ۱}{x_۲ - ۳}$

$\Rightarrow \cancel{۲x_۱x_۲} - ۶x_۱ + x_۲ - \cancel{۳} = \cancel{۲x_۱x_۲} - ۶x_۲ + x_۱ - \cancel{۳} \Rightarrow ۷x_۲ = ۷x_۱$

$\Rightarrow x_۱ = x_۲ \Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک است.

$y = \frac{۲x + ۱}{x - ۳} \Rightarrow ۲x + ۱ = xy - ۳y \Rightarrow ۱ + ۳y = xy - ۲x$

$\Rightarrow x(y - ۲) = ۳y + ۱ \to x = \frac{۳y + ۱}{y - ۲} \to f^{-۱}(x) = \frac{۳x + ۱}{x - ۲}$

۳

$S_n = \frac{a_۱(q^n - ۱)}{q - ۱}$

روش اول: جملات ششم تا دهم، خود یک دنباله‌ی هندسی با همان قدر نسبت و جمله‌ی اول آن $a_۶$ می‌باشد، تعداد جملات آن نیز ۵ است. پس داریم:

$S_۵ = ۳۲S_{۶-۱۰} \Rightarrow \frac{a_۱(q^۵ - ۱)}{q - ۱} = ۳۲ \times \frac{a_۶(q^۵ - ۱)}{q - ۱} \Rightarrow a_۱ = ۳۲a_۶$

$\Rightarrow a_۱ = ۳۲a_۱q^۵ \to q^۵ = \frac{۱}{۳۲} \to q = \frac{۱}{۲}$

روش دوم:

$a_۵ = ۳۲S_{۶-۱۰} = ۳۲(S_{۱۰} - S_۵) = ۳۲S_{۱۰} - ۳۲S_۵ \Rightarrow ۳۳S_۵ = ۳۲S_{۱۰}$

$\Rightarrow ۳۳ \times \frac{a_۱(q^۵ - ۱)}{q - ۱} = ۳۲ \times \frac{a_۱(q^{۱۰} - ۱)}{q - ۱} \Rightarrow ۳۳(q^۵ - ۱) = ۳۲(q^۵ - ۱)(q^۵ + ۱)$

$\Rightarrow q^۵ + ۱ = \frac{۳۳}{۳۲} \to q^۵ = \frac{۱}{۳۲} \to q = \frac{۱}{۲}$

۴

$$\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin(\pi+\frac{\pi}{۲}+\alpha)}-\frac{\tan(\pi+\frac{\pi}{۲}+\alpha)}{\cot(۳\pi-\alpha)}+\tan(۵\pi-\alpha)+\cos ۸\pi$$

$$=\frac{-\sin\alpha}{-\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)}-\frac{\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)}{\cot(-\alpha)}+\tan(-\alpha)+۱$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{-\cot\alpha}{-\cot\alpha}-\tan\alpha+۱=\tan\alpha-۱-\tan\alpha+۱=۰$$

۵

الف) $\tan(۱۸۰^\circ+۹۰^\circ+a^\circ)=\tan(۹۰^\circ+a)=-\cot a^\circ$

ب) $\sin(۳۶۰^\circ+۱۸۰^\circ-a^\circ)=\sin(۱۸۰^\circ-a^\circ)=\sin a^\circ$

ج) $\cos(۲\times۳۶۰^\circ+۱۸۰^\circ-a^\circ)=\cos(۱۸۰^\circ-a^\circ)=-\cos a^\circ$

۶

الف) $۳(f-g)(۴)=۳f(۴)-۳g(۴)=۳\times\frac{۱}{۳}-۳\times۱=۱-۳=-۲$

ب) $D_f: x\neq ۱\ ,\ D_g: x\geq ۳\ ,\ D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}$

$\Rightarrow D_{fog}=\{x\geq ۳ | g(x)\neq ۱\}\rightarrow \sqrt{x-۳}\neq ۱\rightarrow x\neq ۴$

$\Rightarrow D_{fog}=[۳,+\infty)-\{۴\}$

۷

الف) $(۳f-g)(-۱)=۳f(-۱)-g(-۱)=۳\times۱-۰=۳$

ب) $D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}$

$-۱\xrightarrow{g}۰\xrightarrow{f}$ تعریف نشده

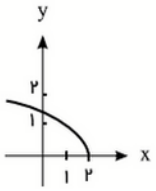
$۲\xrightarrow{g}۴\xrightarrow{f}۵\Rightarrow(۲,۵)$

۸

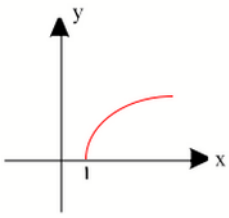
$۵\xrightarrow{g}۳\xrightarrow{f}$ تعریف نشده $\Rightarrow fog=\{(۲,۵)\}$

$f(x)=\sqrt{۲-x}\rightarrow ۲-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۲\rightarrow D_f=(-\infty,۲]$

$\sqrt{۲-x}\geq ۰\rightarrow y\geq ۰\rightarrow R_f=[۰,+\infty)$



۹



$y=\sqrt{x-۱}\Rightarrow y^۲=x-۱\Rightarrow y^۲+۱=x\Rightarrow x^۲+۱=y=f^{-۱}(x)$

۱۰

این دنباله‌ی حسابی است و داریم:

$S_n=\frac{n}{۲}[a_۱+a_n]$

$a_۱=۳-۱=۲\ ,\ a_{۲۰}=۶۰-۱=۵۹$

$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(a_۱+a_{۲۰})=۱۰(۲+۵۹)=۶۱۰$

۱۱

$$-۱ \leq x < ۰ \rightarrow [x] = -۱ \rightarrow y = -۱$$

$$۰ \leq x < ۱ \rightarrow [x] = ۰ \rightarrow y = ۱$$

$$۱ \leq x < ۲ \rightarrow [x] = ۱ \rightarrow y = ۳$$

$$x = ۲ \rightarrow [x] = ۲ \rightarrow y = ۵$$